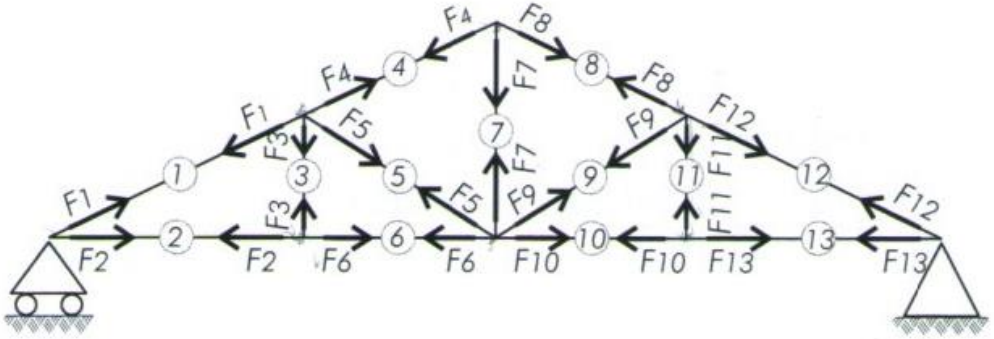
INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SÃO PAULO

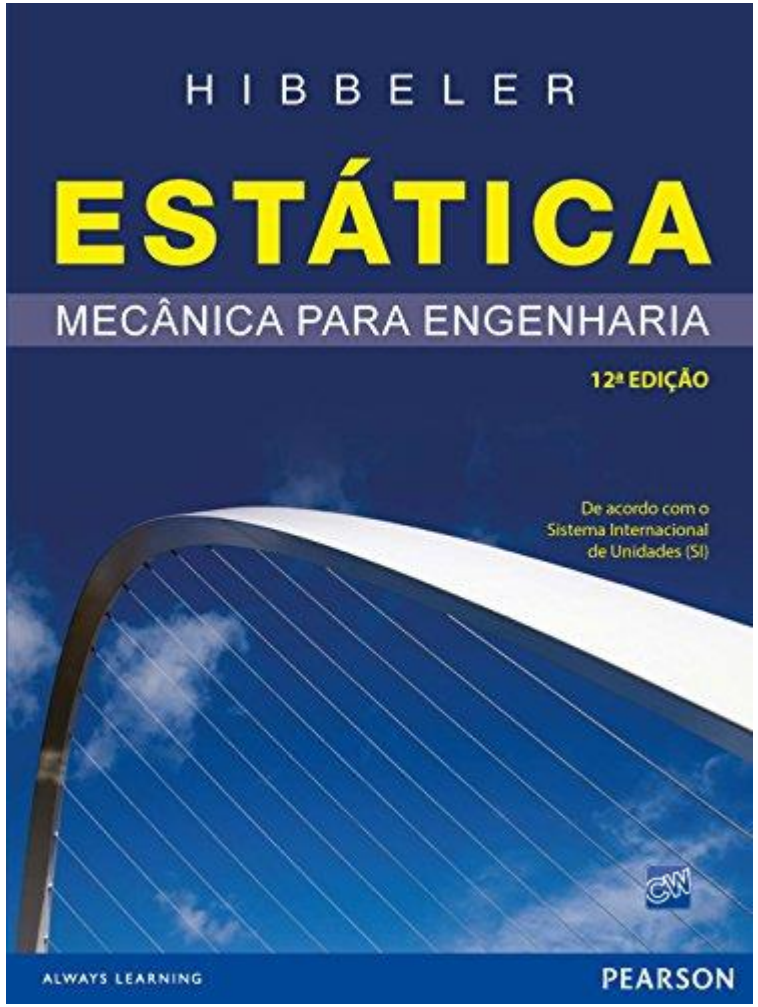
ESTÁTICA

Aula 02 – Vetores de força

Italo Leite de Camargo

ESTÁTICA

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SÃO PAULO



HORÁRIO DE ATENDIMENTO

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SÃO PAULO

Terças-feiras- 18:00– 19:00

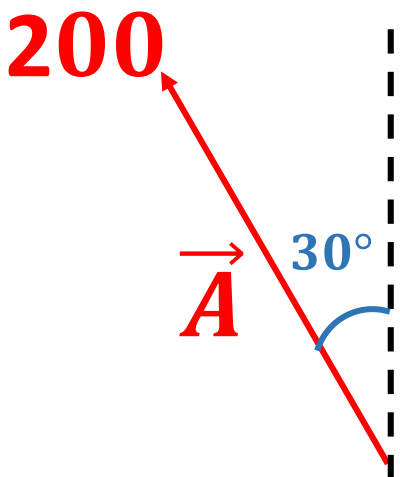
Exercícios da última aula

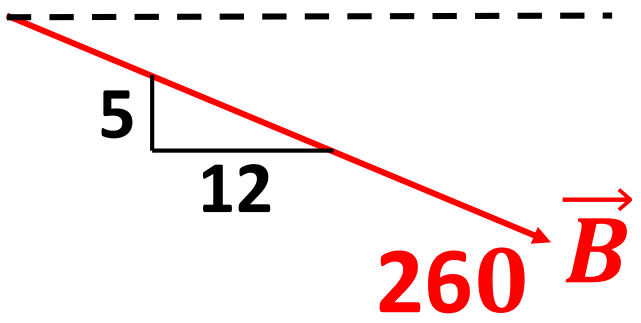
1- Determine o módulo do vetor $2\vec{R}$, onde

$a)$ $\vec{R}$ = 100 i + 240 j b) $\vec{R}$ = 80 i - 60 j

2- Escreva R em notação vetorial cartesiana

$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$





Exercícios

1- Determine o módulo do vetor $2\vec{R}$, onde

$a)\ \vec{R} = 100\ \mathbf{i} + 240\ \mathbf{j}$

$\overrightarrow{2R} = 200\ \mathbf{i} + 480\ \mathbf{j}$

$|2\vec{R}| = \sqrt{200^2 + 480^2} = 520$

$b)\ \vec{R} = 80\ \mathbf{i} - 60\ \mathbf{j}$

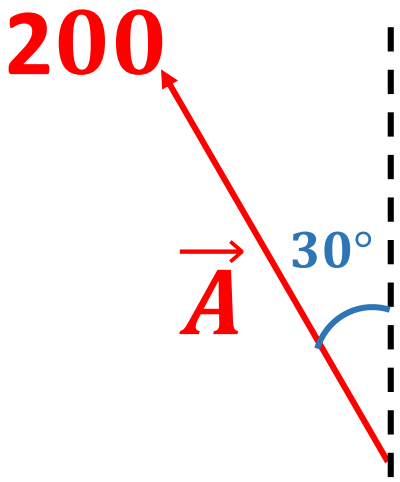
$\overrightarrow{2R} = 160\ \mathbf{i} - 120\ \mathbf{j}$

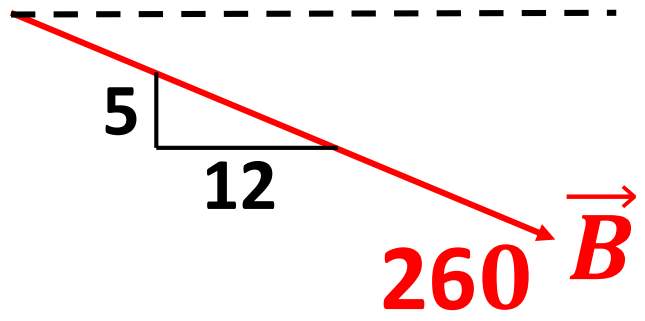
$|2\vec{R}| = \sqrt{160^2 + (-120)^2} = 200$

Exercícios

2 - Escreva R em notação vetorial cartesiana

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$





$$\vec{A} = -200 * \text{sen}(30°)\,\text{i} + 200\ * \cos(30°)\text{j}$$

$$\vec{A} = -100\,\text{i} + 173\,\text{j}$$

$$\vec{B} = 260 * \frac{12}{13}\text{i} - 260\ * \frac{5}{13}\text{j}$$

$$\vec{B} = 240\text{i} - 100\text{j}$$

$$\vec{R} = 140\,\text{i} + 73\,\text{j}$$

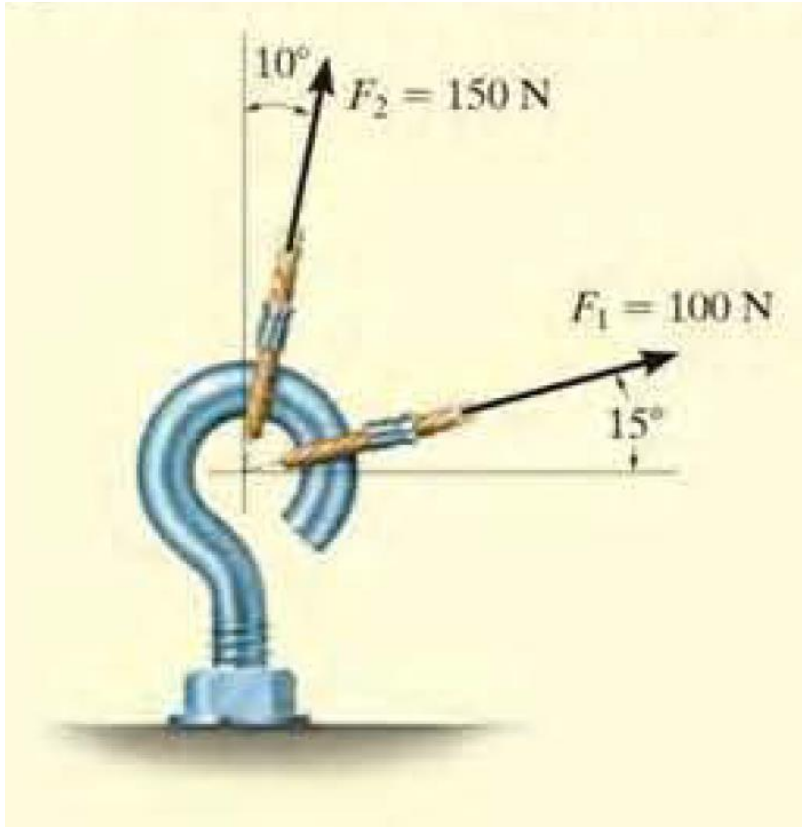
INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO

VETORES 2D

VETORES DE FORÇA

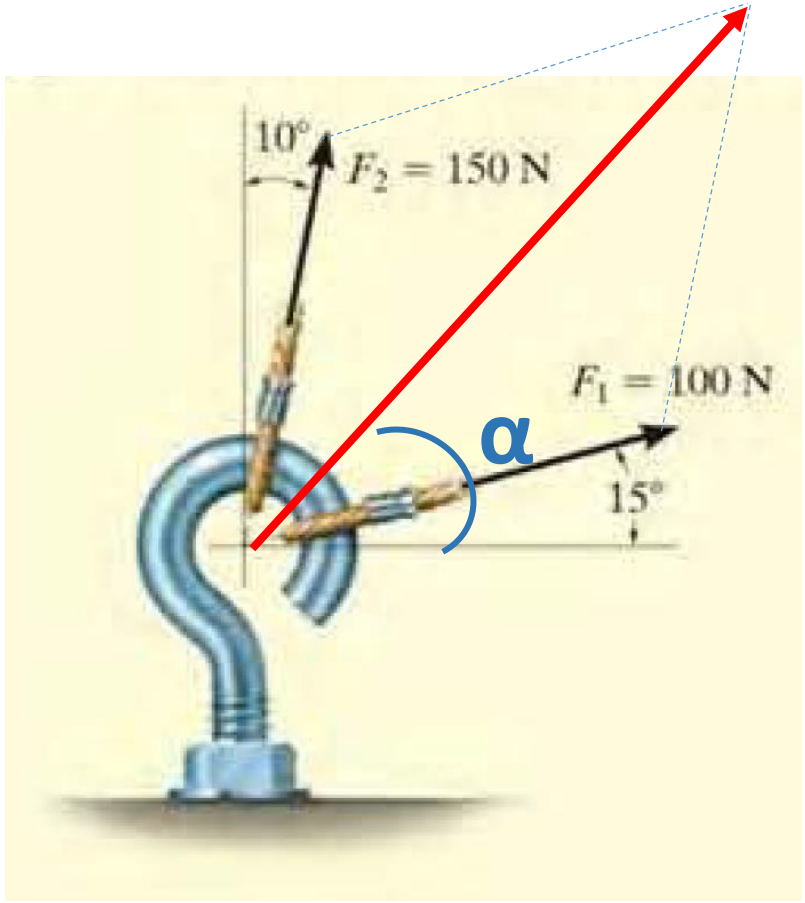
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SÃO PAULO

O gancho está sujeito a duas forças (F1 e F2). Determine a intensidade e direção da força resultante



VETORES DE FORÇA

O gancho está sujeito a duas forças (F1 e F2). Determine a intensidade e direção da força resultante



$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$$

$$\vec{F_1} = 100\cos(15°)\mathbf{i} + 100\,\text{sen}(15°)\mathbf{j}$$

$$\vec{F_2} = 150\,\text{sen}(10°)\,\mathbf{i} + 150\cos(10°)\mathbf{j}$$

$$\vec{R} = 123\,\mathbf{i} + 174\,\mathbf{j}$$

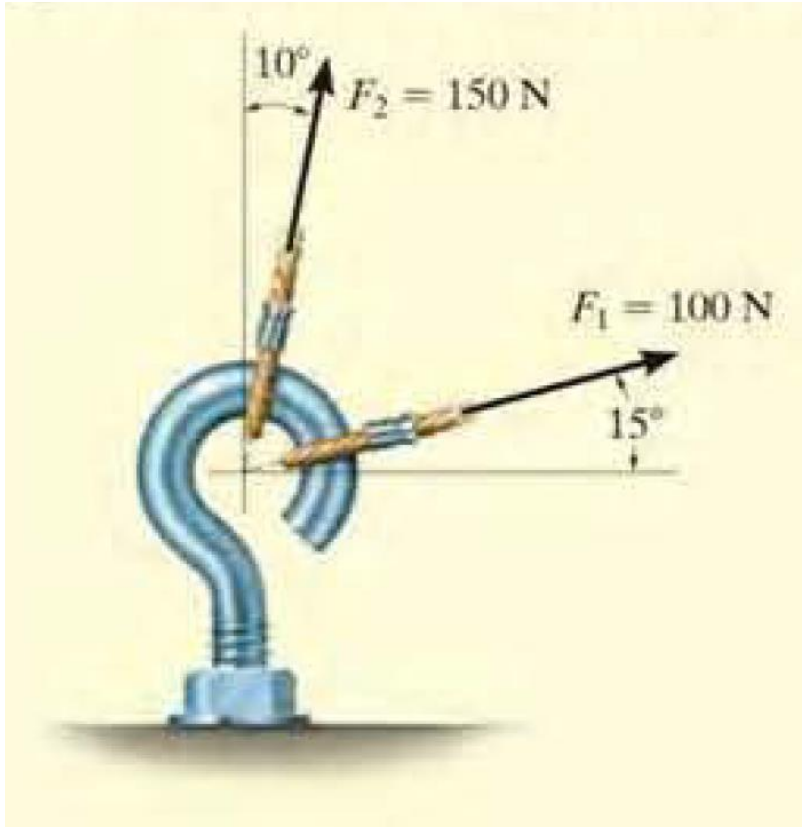
$$|\vec{R}| = 213\ \text{N}$$

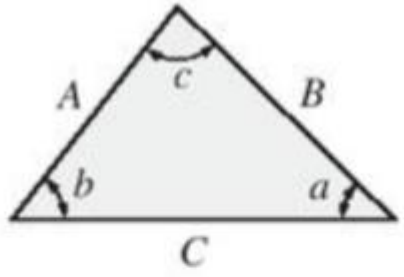
$$tg\,(\alpha) = 174/123 \longrightarrow \alpha = 54,8°$$

VETORES DE FORÇA

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SÃO PAULO

O gancho está sujeito a duas forças (F1 e F2). Determine a intensidade e direção da força resultante (OUTRA FORMA)





Lei dos senos:

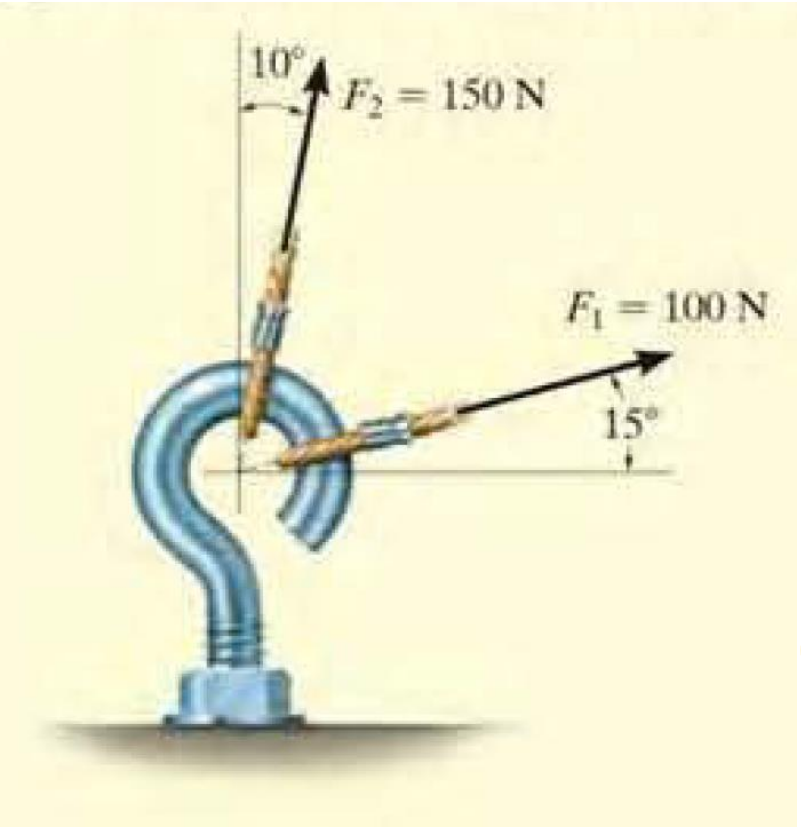
$$\frac{A}{\operatorname{sen} a} = \frac{B}{\operatorname{sen} b} = \frac{C}{\operatorname{sen} c}$$

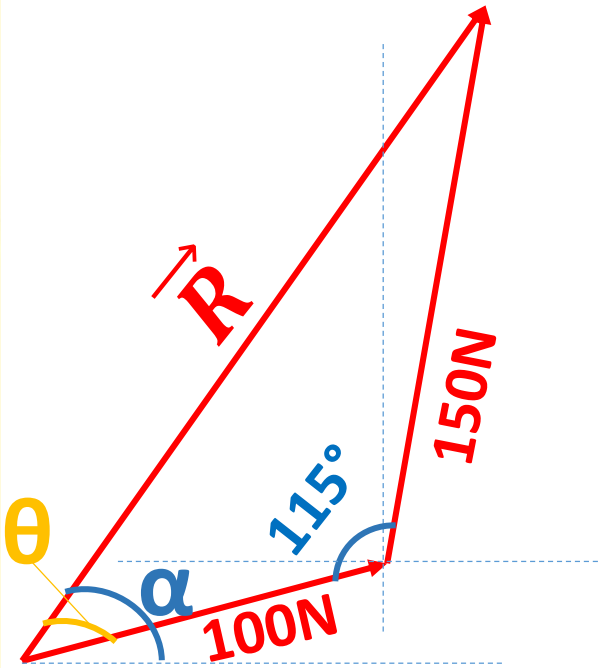
Lei dos cossenos:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos c}$$

VETORES DE FORÇA

O gancho está sujeito a duas forças (F1 e F2). Determine a intensidade e direção da força resultante (OUTRA FORMA)





Lei dos cossenos

$$\overrightarrow{|R|} = \sqrt{100^2 + 150^2 - 2 * 100 * 150 * cos\,(115°)}$$

$$\overrightarrow{|R|} = 213\ N$$

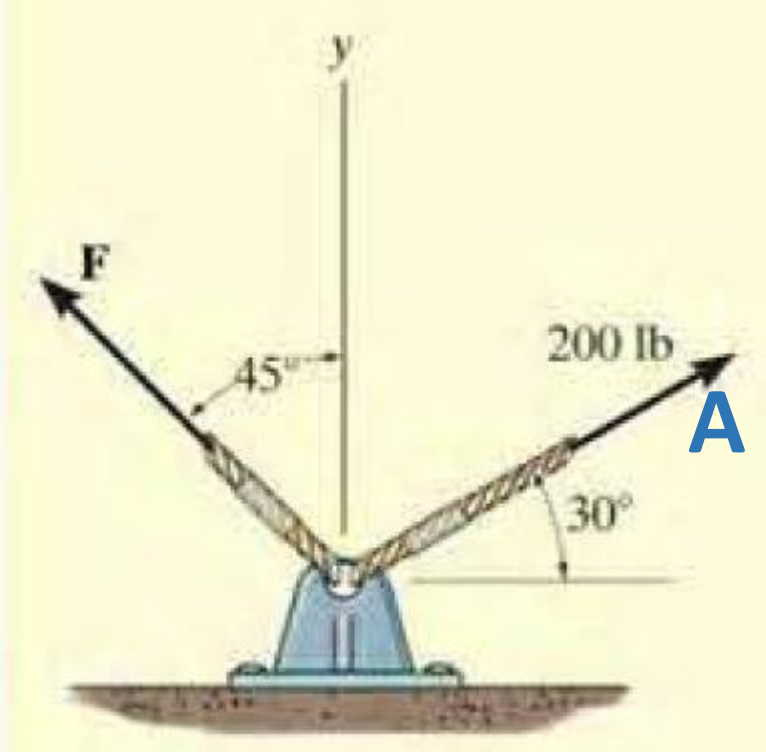
Lei dos senos

$$\frac{150}{sen\theta} = \frac{213}{\text{sen}\,(115°)} \qquad \theta = 39,8°$$

$$\alpha = \theta + 15° = 54,8°$$

VETORES DE FORÇA

Determine F para que a força resultante seja vertical (ao longo do eixo Y)



$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{F}$$

$$\vec{A} = 200\cos(30°)i + 200\,\text{sen}(30°)j$$

$$\vec{F} = -F\,\text{sen}(45°)\,i + F\cos(45°)j$$

$$\vec{R} = (173 - F\,\text{sen}(45°))i + (100 + F\cos(45°)j$$

Força vertical => componente horizontal nulo

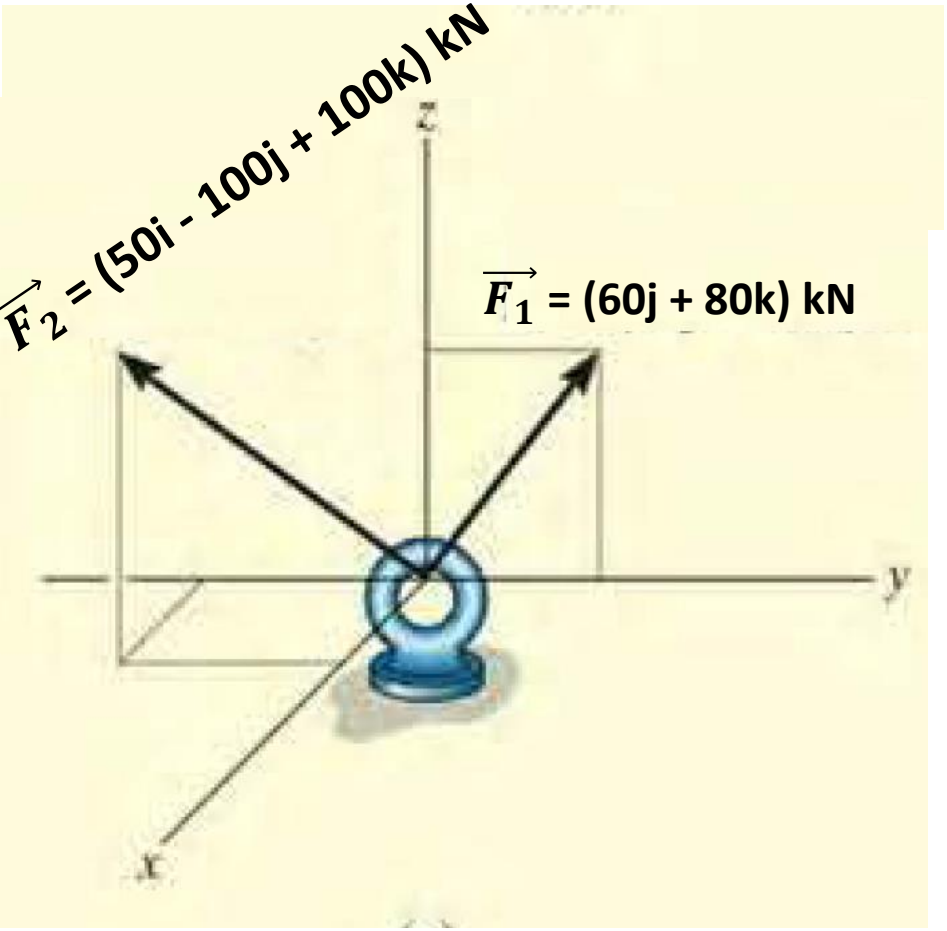
$$173 - F\,\text{sen}(45°) = 0 \longrightarrow F = 245\ \text{lb}$$

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO

VETORES 3D

VETORES DE FORÇA (3D)

Determine a intensidade da força resultante:



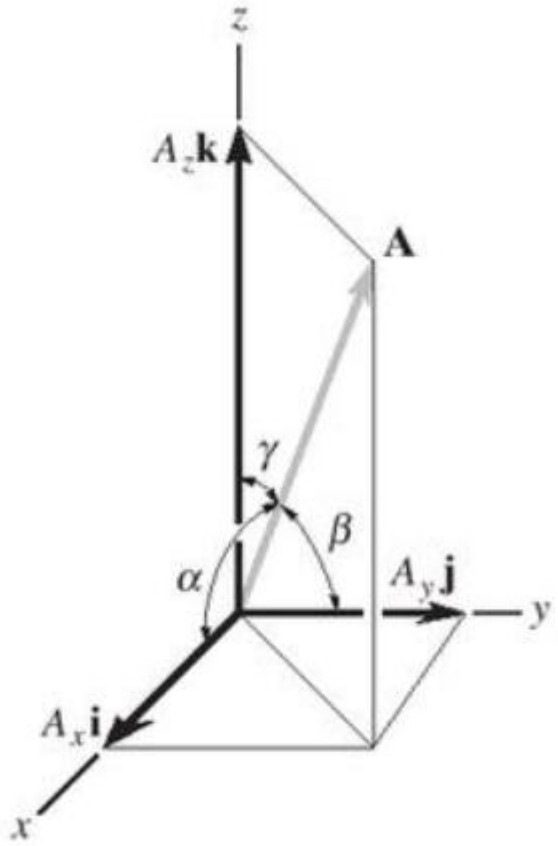
$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$$

$$\vec{R} = (50 + 0)\,i + (-100 + 60)\,j + (100 + 80)\,k$$

$$\vec{R} = 50\,i - 40\,j + 180\,k$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{50^2 + (-40)^2 + (180)^2} = 191\ kN$$

VETORES DE FORÇA (3D)



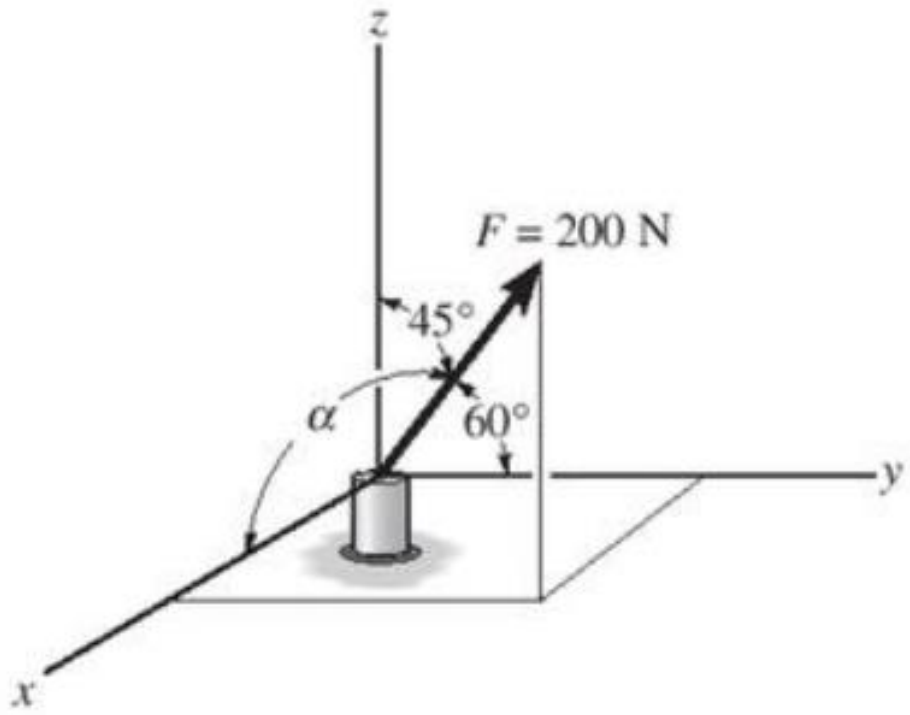
$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A} \qquad \cos\beta = \frac{A_y}{A} \qquad \cos\gamma = \frac{A_z}{A}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

VETORES DE FORÇA (3D)

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SÃO PAULO

Expresse F como um vetor cartesiano



1 – Determinar os ângulos

$\alpha = ?$

$\beta = 60°$

$\gamma = 45°$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$cos^2\ \alpha = 0{,}25$ $\qquad$ $cos\ \alpha = \pm\ 0{,}5$

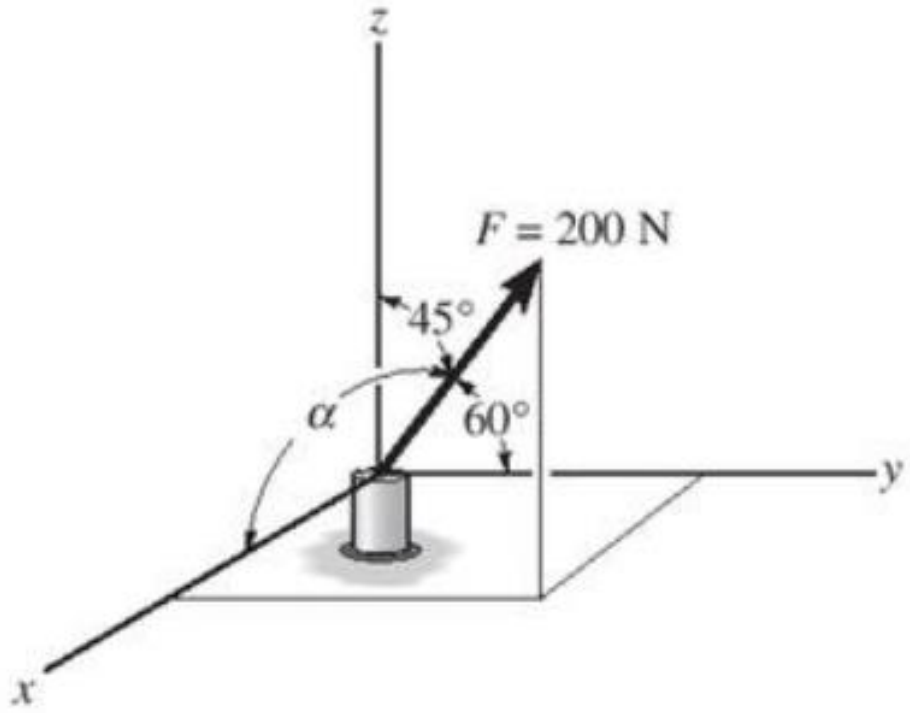
Como o componente x é positivo:

$cos\ \alpha = 0{,}5$ $\qquad$ $\alpha\ = 60°$

VETORES DE FORÇA (3D)

Expresse F como um vetor cartesiano

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A} \qquad \cos\beta = \frac{A_y}{A} \qquad \cos\gamma = \frac{A_z}{A}$$



$\vec{F}$ = (200 cos(60°)i + 200 cos(60°)j + 200 cos(45°)k) N

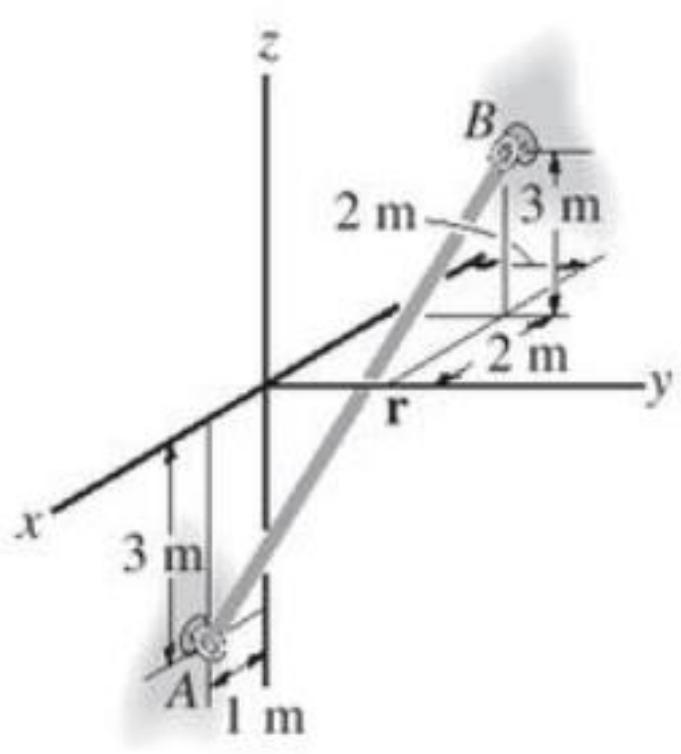
$\vec{F}$ = (100 i + 100 j + 141 k) N

VETORES POSIÇÃO

(localiza um ponto no espaço em ralação a outro)

VETORES POSIÇÃO

Uma fita elástica está presa entre os pontos A e B. Determine seu comprimento.



Coordenadas dos pontos.

A= (1, 0, -3) m

B = (-2, 2, 3) m

Vetor posição de A para B

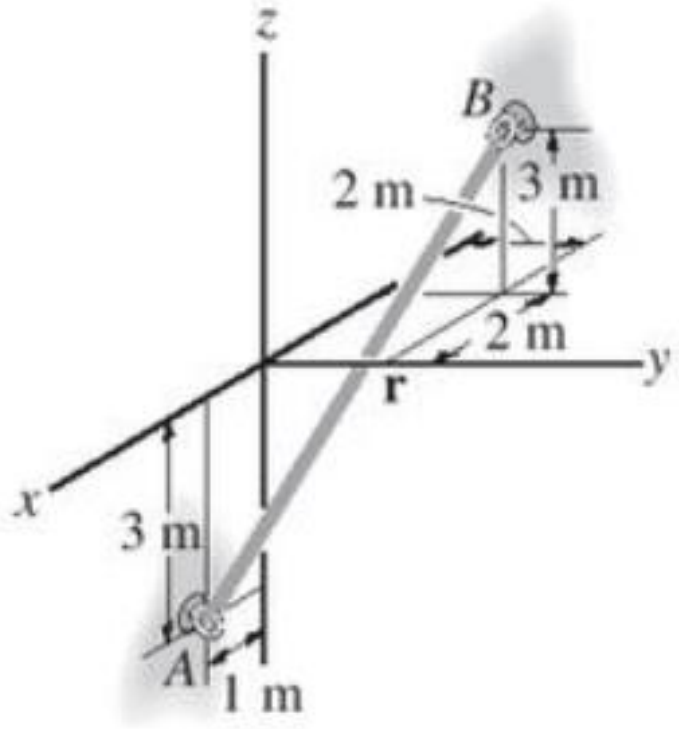
$\vec{r}$ = (-2 - 1) i + (2 - 0) j + (3 – (-3)) k

$\vec{r}$ = (-3 i + 2 j + 6 k) m

$|\vec{r}| = \sqrt{(-3)^2+(2)^2+(6)^2} = 7$ m

VETORES POSIÇÃO

Qual o vetor unitário que aponta a posição de A para B?



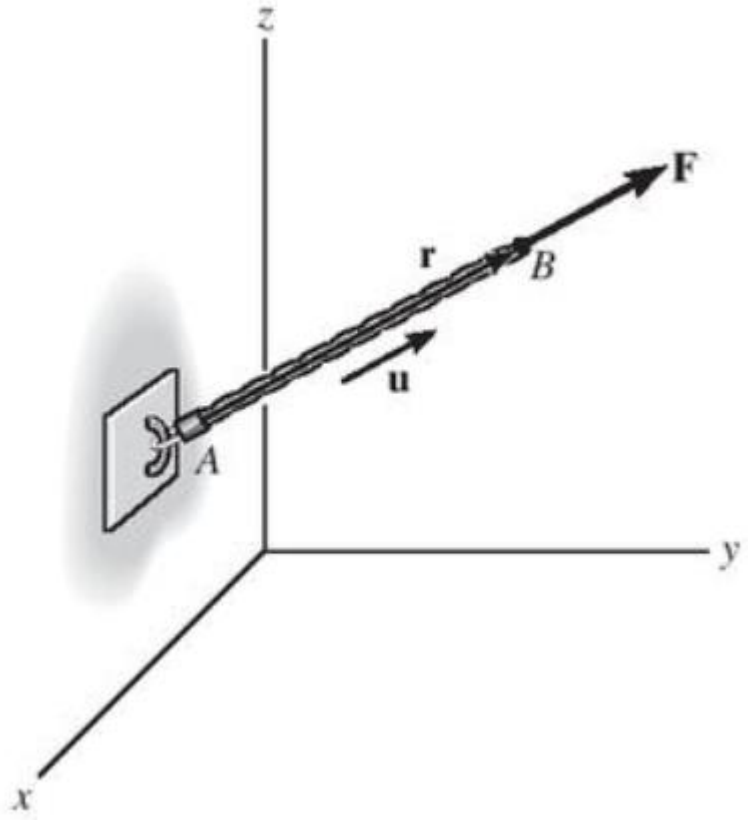
$$\vec{r} = (-3\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 6\,\mathbf{k})\ \mathrm{m}$$

$$|\vec{r}| = 7\ \mathrm{m}$$

$$\vec{u} = -\frac{3}{7}\,\mathbf{i} + \frac{2}{7}\,\mathbf{j} + \frac{6}{7}\,\mathbf{k}$$

VETOR ORIENTADO AO LONGO DE UMA RETA

VETORES ORIENTADO POR RETA

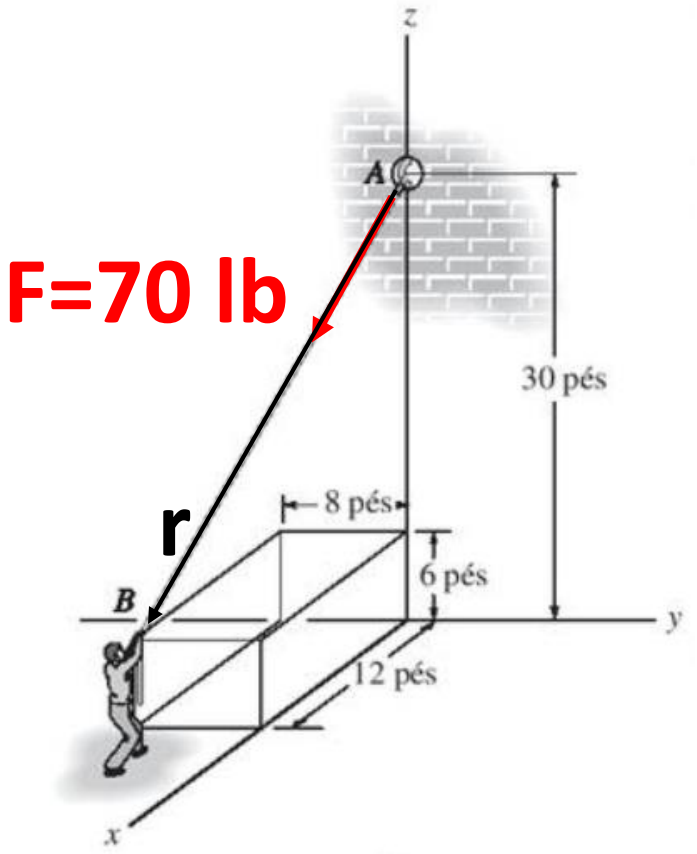


$$\vec{F} = |F| * \vec{u}$$

$$\vec{F} = |F| * \frac{\vec{r}}{|r|}$$

VETORES ORIENTADO POR RETA

Um homem puxa a corda com uma força de 70 lb. Represente esta força com vetor cartesiano.



$\vec{r}$ = (12 i - 8 j -24 k) pés

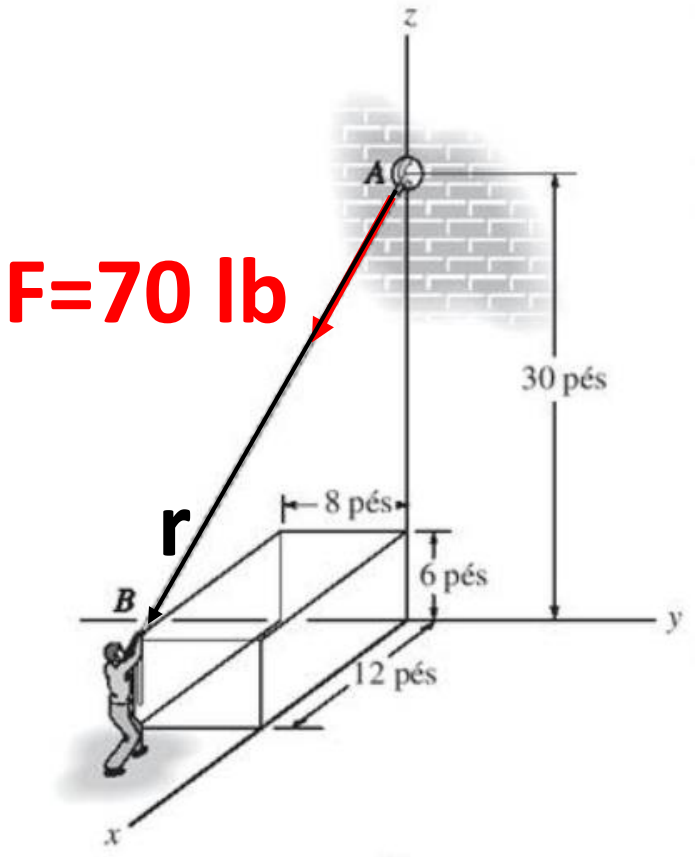
$|\vec{r}|$= 28 pés

$$\vec{u} = \frac{12}{28}i - \frac{8}{28}j - \frac{24}{28}k$$

$$\vec{u} = \frac{3}{7}i - \frac{2}{7}j - \frac{6}{7}k$$

VETORES ORIENTADO POR RETA

Um homem puxa a corda com uma força de 70 lb. Represente esta força com vetor cartesiano.



$$\vec{F} = |F| * \vec{u}$$

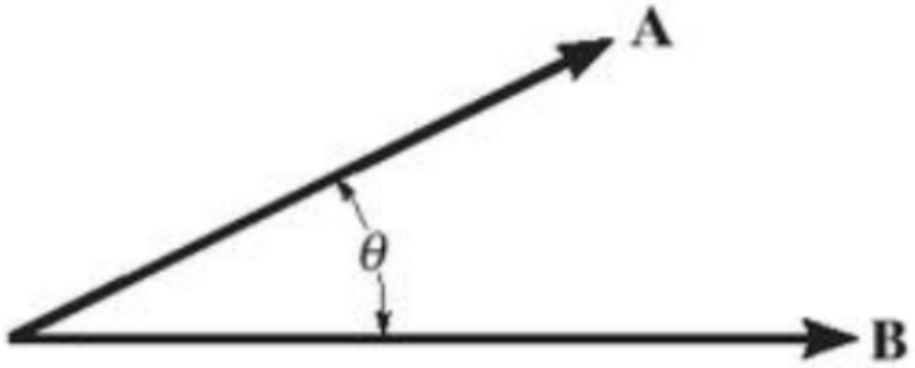
$$\vec{F} = \left(70 * \left(\frac{3}{7}i - \frac{2}{7}j - \frac{6}{7}k\right)\right)\text{lb}$$

$$\vec{F} = (30\,i - 20\,j - 60\,k)\text{lb}$$

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO

PRODUTO ESCALAR

PRODUTO ESCALAR



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |A| * |B| * \cos\theta$$

$$\vec{A} = A_x\, i + A_y\, j + A_z\, K$$

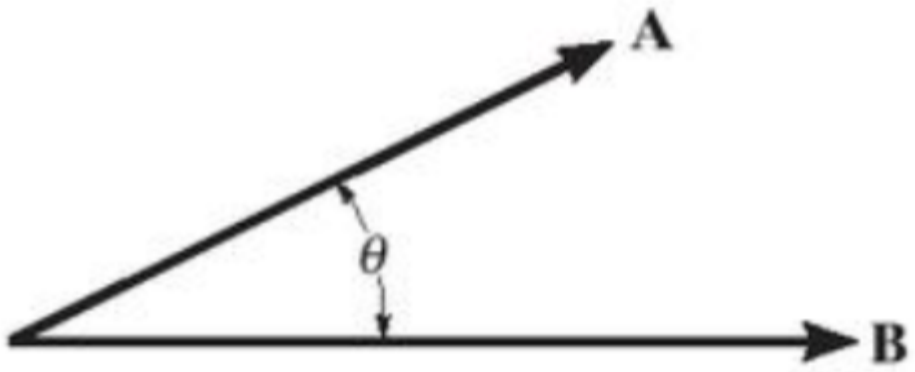
$$\vec{B} = B_x\, i + B_y\, j + B_z\, K$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x * B_x + A_y * B_y + A_z * B_z$$

PRODUTO ESCALAR

Determine o ângulo θ, dados: $\vec{A} = 8,66\ i + 5\ j$

$\vec{B} = 12\ i$



$\vec{A} \cdot \vec{B} = |A| * |B| * cos\ \theta$

$8,66 * 12 + 5 * 0 = 10 * 12 * cos\ \theta$

$cos\ \theta = 0,866$

$\theta = 30°$

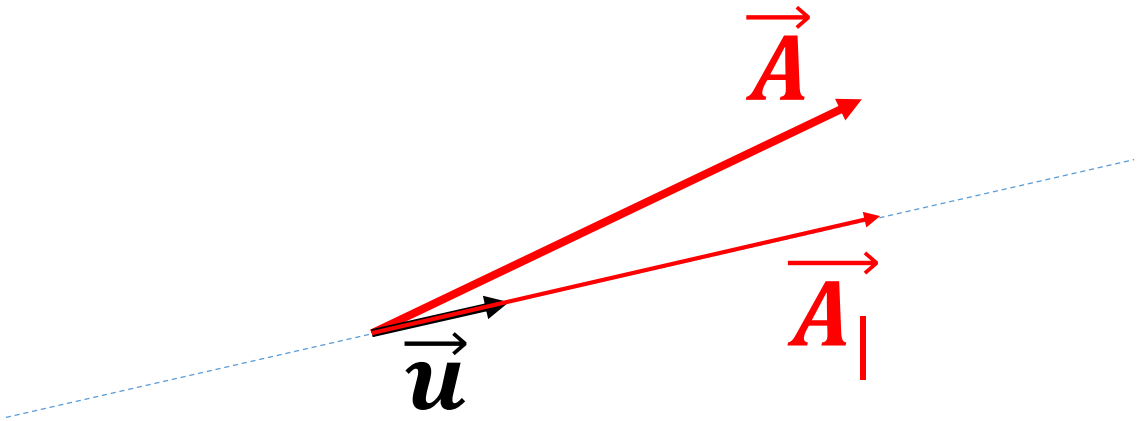
PROJETAR VETOR SOBRE UMA DIREÇÃO

PRODUTO ESCALAR

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SÃO PAULO

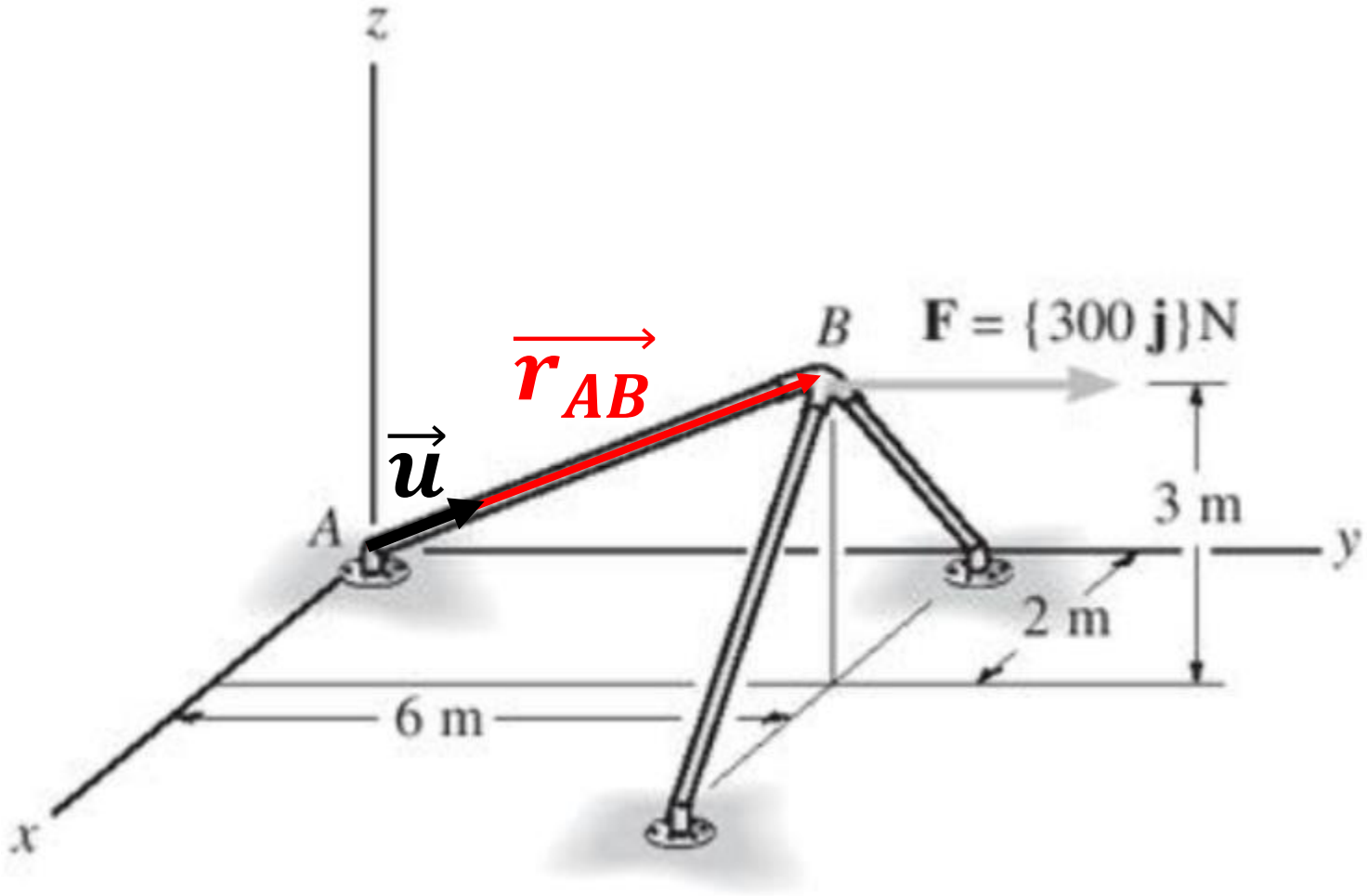
A intensidade da projeção do vetor $\vec{A}$ ao longo de uma direção especificada pelo vetor unitário .$\vec{u}$ é determinada pelo produto escalar:

$$|A_{|}| = \vec{A} \,.\, \vec{u}$$



PRODUTO ESCALAR

Determine as intensidades da das componentes da força paralela e perpendicular ao elemento AB



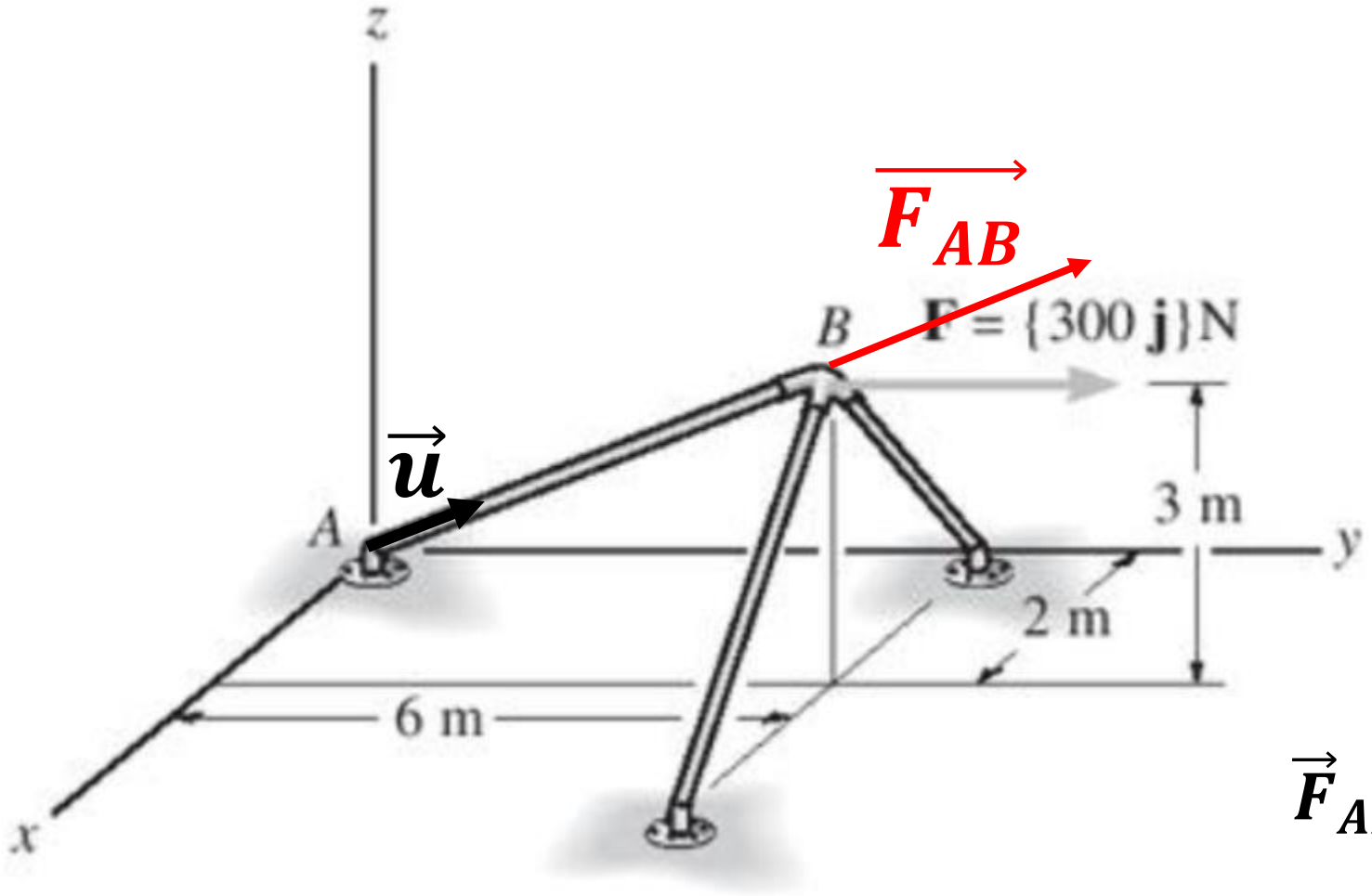
$$\vec{r}_{AB} = (2\,i + 6\,j + 3\,k)\ m$$

$$|\vec{r}_{AB}| = 7m$$

$$\vec{u} = \frac{2}{7}i + \frac{6}{7}j + \frac{3}{7}k$$

PRODUTO ESCALAR

Determine as intensidades da das componentes da força paralela e perpendicular ao elemento AB



$$\vec{F}_{AB} = \vec{F} \cdot \vec{u}$$

$$|\vec{F}_{AB}| = 0 * \frac{2}{7} + 300 * \frac{6}{7} + 0 * \frac{3}{7}$$

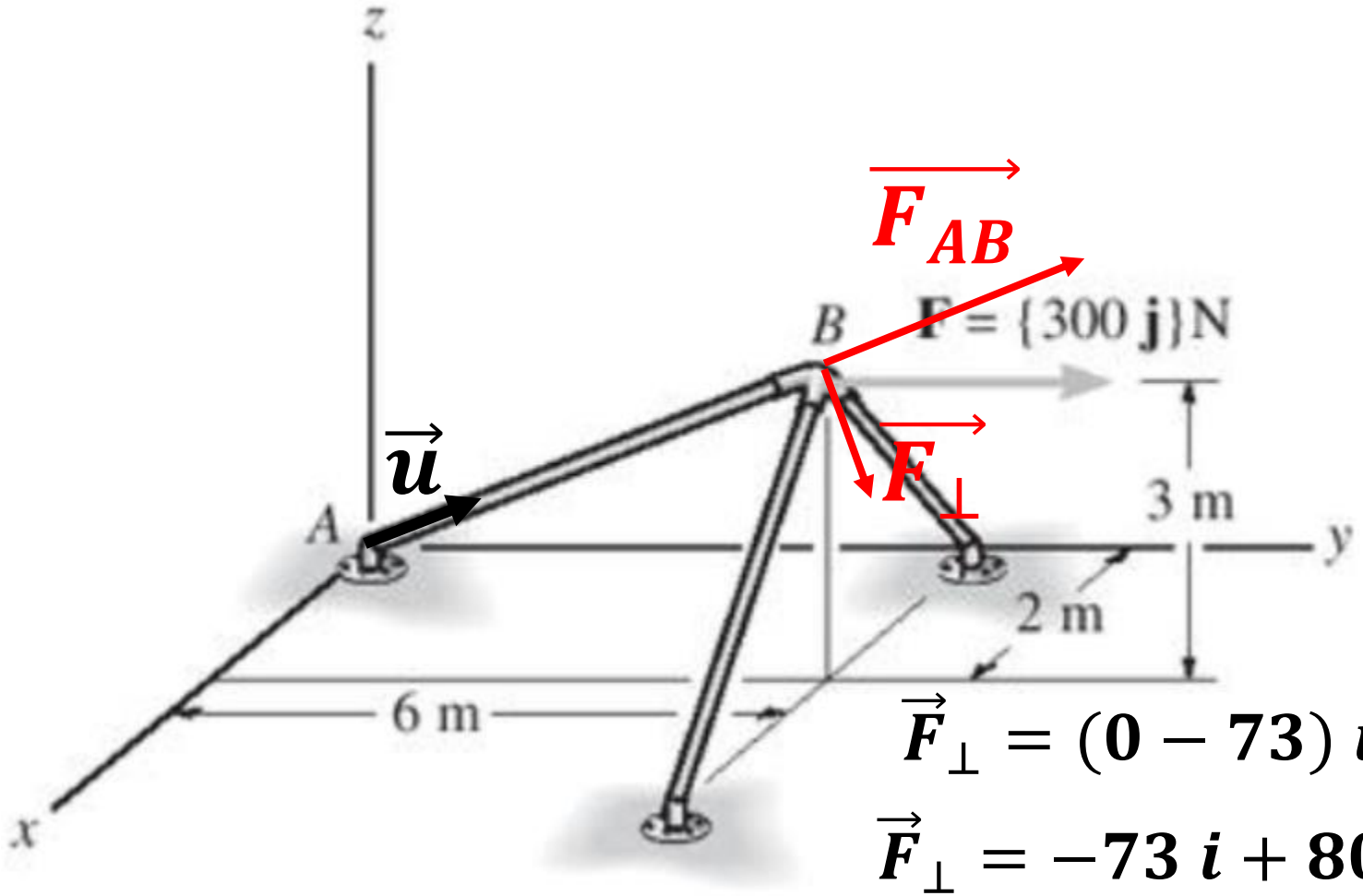
$$|\vec{F}_{AB}| = 257\ N$$

$$\vec{F}_{AB} = |\vec{F}_{AB}| * \vec{u}$$

$$\vec{F}_{AB} = (73\ i + 220\ j + 110k)N$$

PRODUTO ESCALAR

Determine as intensidades da das componentes da força paralela e perpendicular ao elemento AB



$$\vec{F} = \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{\perp}$$

$$\vec{F}_{\perp} = \vec{F} - \vec{F}_{AB}$$

$$\vec{F}_{\perp} = (0 - 73)\,\boldsymbol{i} + (300 - 220)\,\boldsymbol{j} + (0 - 110)\boldsymbol{k}$$

$$\vec{F}_{\perp} = -73\,\boldsymbol{i} + 80\,\boldsymbol{j} - 110\boldsymbol{k} \qquad |\vec{F}_{\perp}| = 154\ N$$

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO

LISTA DE EXERCÍCIOS

Exercício 1

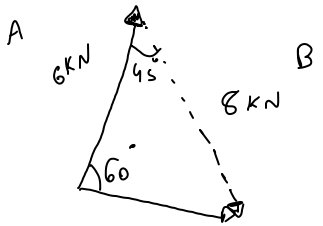
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SÃO PAULO

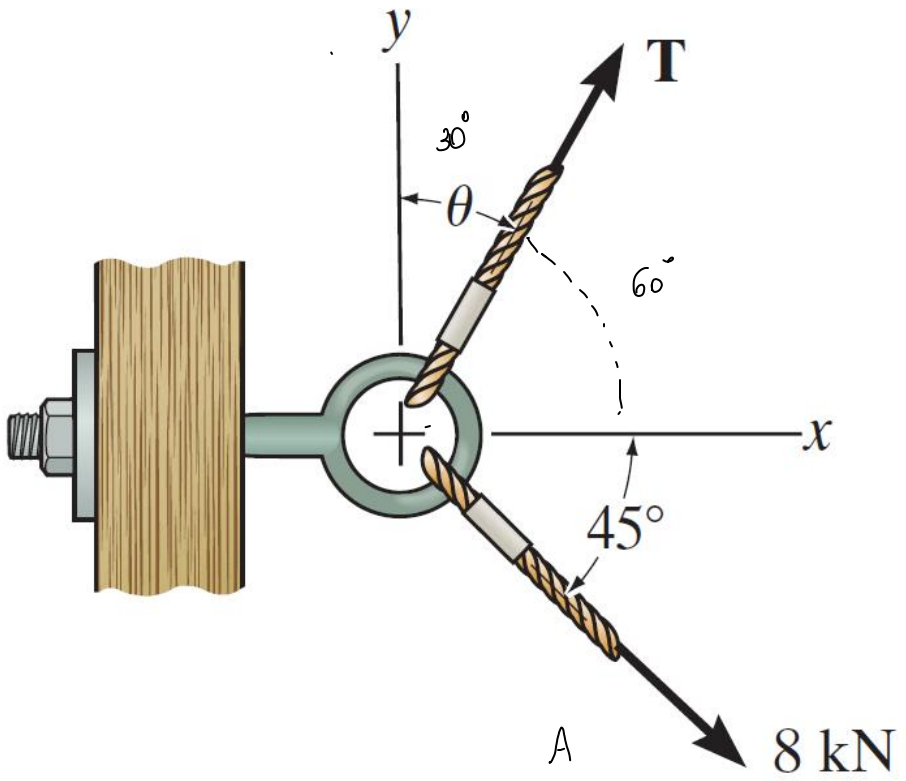
Determine a intensidade e a direção da força resultante se θ = 30 ° e T=6kN

$A^2 + B^2 - (2 \cdot A \cdot B \cdot \cos c) = C^2$

$6^2 + 8^2 - (2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos 45)$

$100 - 48\sqrt{2} = C$





$T_x = T \cdot \cos 60°$

$T_y = T \cdot \text{SEN}60°$

$A_x = A \cdot \cos 45°$

$A_y = -(A \cdot \text{SEN}45°)$

$F_{Rx} = T \cdot \cos 60° + A \cdot \cos 45°$

$= 3 + 5{,}6 = 8{,}6\,kN$

$F_{Ry} = T \cdot \text{SEN}60° - A \cdot \text{SEN}45°$

$= 5{,}2 - 5{,}6 = -0{,}4$

$\vec{F_R} = (8{,}6)1kN - (0{,}4\vec{y})kN$

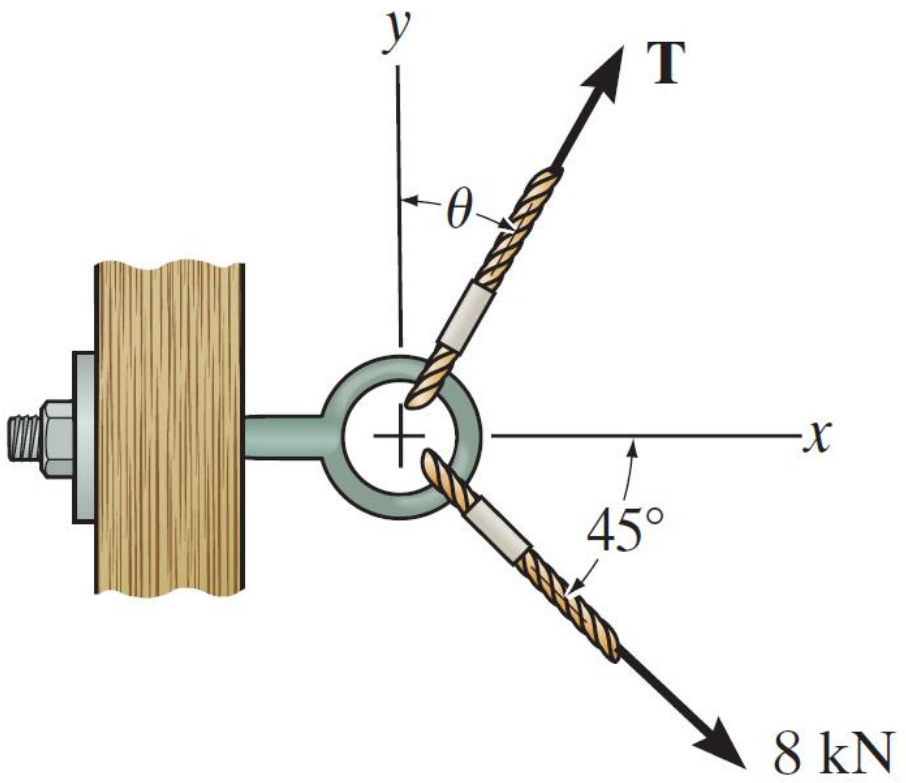
$|\vec{F_R}| = 8{,}6$

$\beta = 2{,}6°$

Exercício 2

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SÃO PAULO

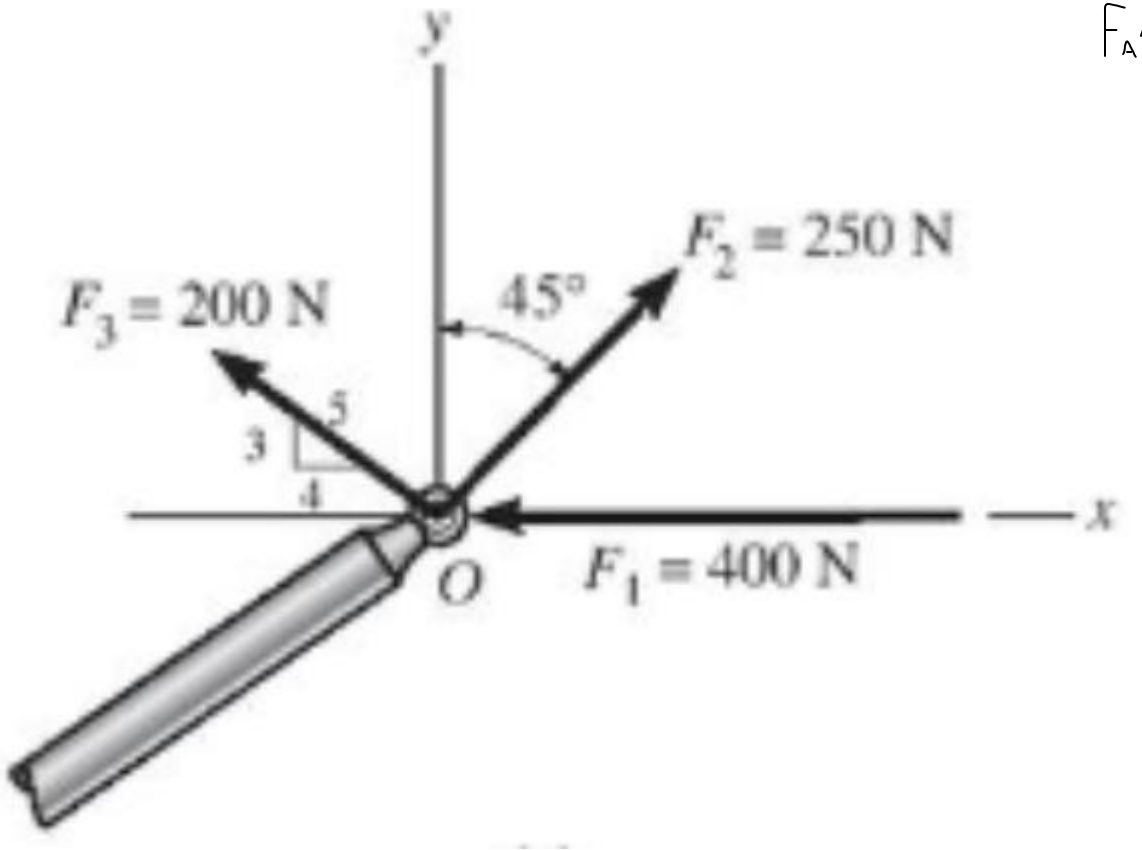
Determine a intensidade e a direção da força resultante se θ = 60 ° e T=5kN



Fácil

Exercício 3

Determine a intensidade e a direção da força resultante.



Exercício 4

Determine a intensidade e a direção da força T para que a resultante tenha 9kN direcionada no eixo X positivo.

$\vec{F_R} = (\text{SEN}\theta \cdot T + 5{,}16\,kN)\,i + (0)\,j$

$|\vec{F_R}| = 9\,kN$

$\vec{F_R} = (x)\,kN + (0)\,kN$

$\sqrt{(\text{SEN}\theta \cdot T + 5{,}16)^2} = 9$

$T_y = \cos\theta \cdot T$

$\text{SEN}\theta \cdot T + 5{,}16 = 9$

$T_x = \text{SEN}\theta \cdot T$

$\text{SEN}\theta \cdot \left(\frac{-5{,}16}{\cos\theta}\right) + 5{,}16 = 9$

$A_y = \text{SEN}45^\circ \cdot A$

$-5{,}16\,\text{Tg}\theta = 3{,}4$

$A_x = \cos 45^\circ \cdot A$

$\text{Tg}\theta = \frac{-3{,}4}{5{,}16}$

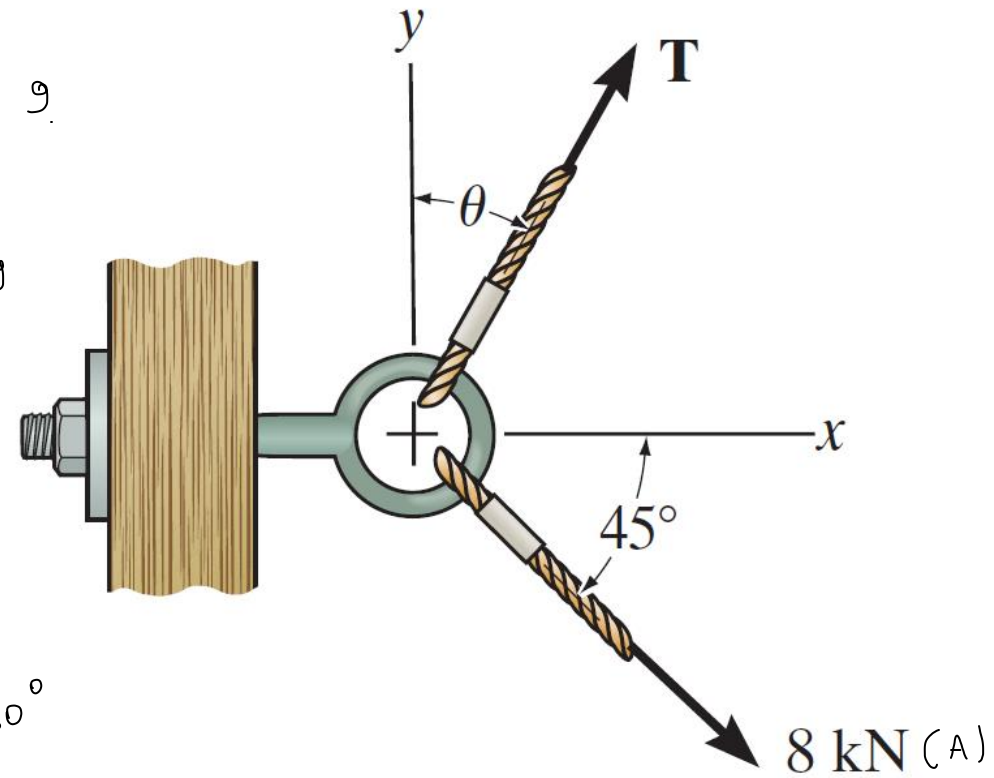
$F_{Ry} = \cos\theta \cdot T + \text{SEN}45^\circ \cdot A = 0$

$= (\cos\theta \cdot T + 5{,}16\,kN)\,j$

$\rightarrow T = \frac{-5{,}16}{\cos\theta}$

$F_{Rx} = (\text{SEN}\theta \cdot T + 5{,}16\,kN)\,i$

$\theta = -30^\circ$

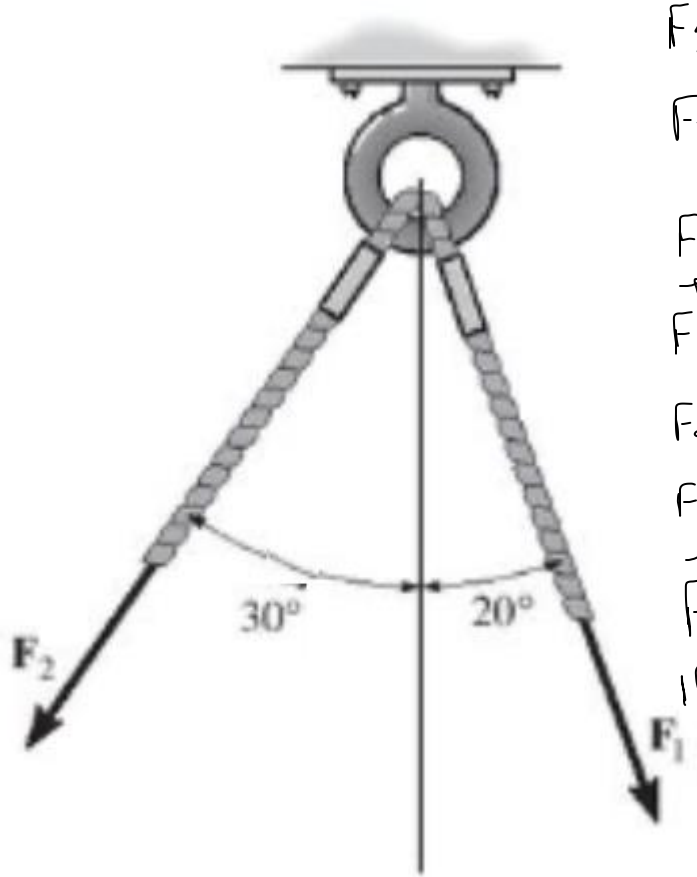


Exercício 5

Determine a intensidade das forças F1 e F2 para que a força resultante tenha intensidade de 1000 N e seja orientada verticalmente para baixo:

$|\vec{F_R}| = 1000N$

$\vec{F_R} = (0)\hat{i} + (y)\hat{j}$



$\vec{F_1} = (x)\hat{i} + (y)\hat{j}$

$F_{1y} = \cos 20^\circ \cdot F_1$

$F_{1x} = \text{SEN}20^\circ \cdot F_1$

$\vec{F_2} = (x)\hat{i} + (y)\hat{j}$

$F_{2y} = \cos 30^\circ \cdot F_2$

$F_{2x} = -\text{SEN}30^\circ \cdot F_2$

$\vec{F_R} = (\text{SEN}20^\circ \cdot F_1 - F_2 \cdot \text{SEN}30^\circ)\hat{i} - (\cos 20^\circ \cdot F_1 + \cos 30^\circ \cdot F_2)$

$|\vec{F_R}| = |(0)\hat{i} - (\cos 20^\circ \cdot F_1 + \cos 30^\circ \cdot F_2)| = 1000$

$|-(\cos 20^\circ \cdot F_1 + \cos 30^\circ \cdot F_2)| = 1000$

$|-(\cos 20^\circ \cdot 1{,}46 \cdot F_2 + \cos 30^\circ \cdot F_2)| = 1000$

$|-(2{,}24\, F_2)| = 1000 \rightarrow \sqrt{(2{,}24 \cdot F_2)^2} = 1000$

$2{,}24 \cdot F_2 = 1000 \rightarrow F_2 = 446\,N$

$\text{SEN}20^\circ \cdot F_1 - F_2 \cdot \text{SEN}30^\circ = 0$

$\text{SEN}20^\circ \cdot F_1 = F_2 \cdot \text{SEN}30^\circ$

$F_1 = \dfrac{F_2 \cdot \text{SEN}30^\circ}{\text{SEN}20^\circ}$

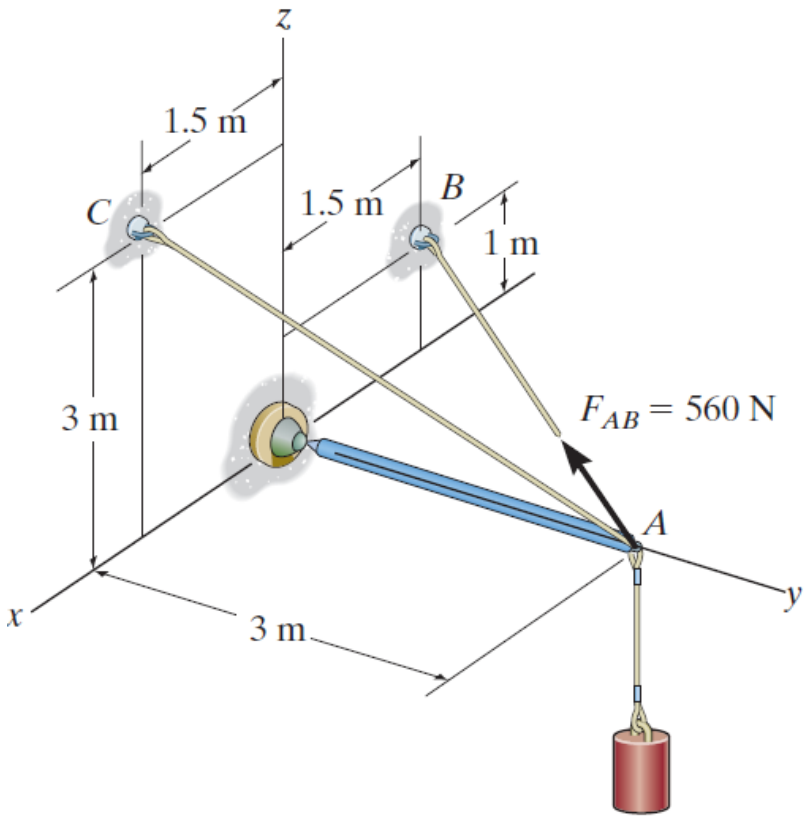
$\boxed{F_1 = 1{,}46\, F_2}$

$F_1 = 651\,N$

Exercício 6

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SÃO PAULO

Determine a componente projetada da força F_{AB} que atua ao longo do tubo AC. Expresse o resultado como um vetor cartesiano



Exercício 7

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SÃO PAULO

Determine os componentes da força F = 56 N que atuam ao longo e perpendicular à linha AO.